



# Etude Numérique de la Convection Naturelle en Milieu Poreux Saturé de Fluide dans une Cavité Rectangulaire à Orientation Variable Soumise à des Conditions de Chauffage Périodiques

Latrèche Abdelkarim<sup>\*1</sup>, Djeddar Mahfoud<sup>\*2</sup>

*\*Département de Physique, Université Mentouri Constantine  
Route Aïn El Bey 25000 Constantine Algérie*

<sup>1</sup>karimlat@yahoo.fr

<sup>2</sup>mdjeddar@yahoo.fr

**Résumé**— La convection naturelle bidimensionnelle dans un matériau poreux rectangulaire et incliné, est analysée en résolvant numériquement les équations des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, en utilisant la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Les conditions aux limites considérées consistent en une paroi inférieure soumise à un profil de température périodique et les trois autres étant thermiquement isolées. Les paramètres externes considérés sont l'angle d'inclinaison et le nombre de Darcy-Rayleigh modifié. Nous trouvons des modes de convection à plusieurs cellules et leur description est donnée en détail. Les nombres de Nusselt locaux sont présentés en fonction des paramètres externes.

**Mots Clés**— convection naturelle, milieu poreux, équations de Boussinesq, loi de Darcy, cavité rectangulaire.

## I. INTRODUCTION

Dans les dernières décennies, un effort de recherche considérable a été consacré à l'étude du transfert de chaleur induit par convection naturelle au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide. L'intérêt pour ces phénomènes de convection naturelle est dû aux nombreuses applications potentielles en ingénierie.

Une revue exhaustive des travaux disponibles sur ce sujet a été faite par Nield et Bejan [1] et Ingham et Pop[2]. Bahloul [3] a fait une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide dans une cavité poreuse verticale. Une différence de température uniforme est appliquée à travers les parois verticales tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Les paramètres dont dépend la structure de l'écoulement sont le nombre de Rayleigh  $Ra$ , qui varie entre 10 et 10000 et le facteur de forme de la cavité  $A$  qui varie entre 1 et 20. Pour un grand nombre de Rayleigh, et sur la base des résultats numériques il a obtenu un modèle approximatif du régime de couche limite. Pour un chauffage élevé, il a donné un modèle simplifié pour le paramètre de stratification  $\gamma = 1.22A^{-0.47}Ra^{0.46}$ . Il a montré aussi que le

coefficient de stratification thermique  $\tau$  dépend essentiellement du rapport de forme de l'enceinte  $A$ , et devient presque indépendant du nombre de Rayleigh,  $Ra$ , dans le régime de la couche limite,  $\tau = 3/2A$ . Il a utilisé la théorie de la stabilité linéaire du flux parallèle pour obtenir le nombre de Rayleigh critique pour une cavité longue ( $A \gg 1$ ). Moya et al [4] Ont analysé un écoulement bidimensionnel de la convection naturelle dans une cavité poreuse, rectangulaire, inclinée et saturée d'un fluide newtonien par une résolution numérique des équations de masse, de mouvement et d'énergie. Ils ont utilisé la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Les conditions aux limites isothermes sont considérées, pour les deux parois verticales opposées qui sont maintenues à des températures constantes, mais différentes (la température de la paroi inférieure est supérieure à la température de la paroi supérieure) et les deux autres parois sont isolées thermiquement. Les paramètres externes considérés sont : l'angle d'inclinaison, le facteur de forme de la cavité et le nombre de Darcy-Rayleigh. Ils ont trouvé trois modes de convection principaux: la conduction, la convection unicellulaire et multicellulaire. Ils ont présenté les nombres de Nusselt locaux et globaux en fonction des paramètres externes. Ils ont exploré la multiplicité des solutions pour un rapport de forme égal à l'unité. L'existence de plus d'une solution est trouvée lorsque la paroi inférieure est à une température plus élevée et à une position horizontale ou proche de l'horizontale.

L'objet du présent travail est une contribution à l'étude des mouvements de convection naturelle se développant dans une cavité rectangulaire inclinée, avec une variation sinusoïdale du profil de température sur la paroi inférieure. Les autres parois sont isolées. La cavité est remplie par un milieu poreux saturé par un fluide newtonien.



## II. ANALYSE THEORIQUE DU PROBLEME

Considérons une cavité rectangulaire imperméable de largeur  $L$  et de hauteur  $H$ , remplie d'un milieu poreux saturé de fluide, comme le montre la fig. 1. On suppose que la température de la paroi inférieure varie périodiquement, les autres parois étant adiabatiques, la cavité est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal. Les propriétés physiques du fluide sont constantes, sauf la masse volumique qui varie linéairement avec la température. Le fluide est newtonien et incompressible. L'écoulement engendré est laminaire, bidimensionnel et permanent.

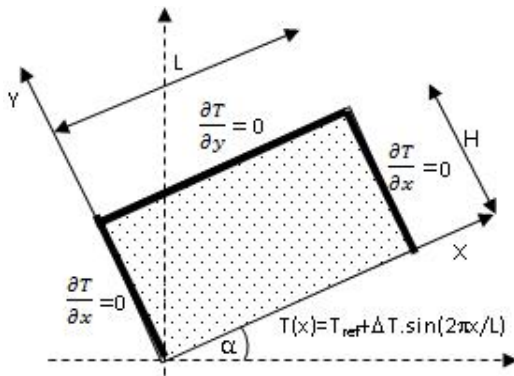


Fig. 1: Définition du modèle physique

En utilisant la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Le mouvement du fluide ainsi que la répartition de température sont régis par les équations suivantes :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Equation de mouvement:

$$u = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 g (1 - \beta (T - T_{ref})) \sin(\alpha) \right)$$

$$v = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g (1 - \beta (T - T_{ref})) \cos(\alpha) \right) \quad (2)$$

Equation de la chaleur:

$$\sigma_T \frac{\partial T}{\partial t} + \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Nous passons directement à écrire les équations adimensionnelles. Nous posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$x^+ = \frac{x}{L}, \quad y^+ = \frac{y}{H}, \quad \psi^+ = \frac{\psi}{a}, \quad t^+ = \frac{t}{L^2/a}$$

$$u^+ = \frac{u}{a}, \quad v^+ = \frac{v}{a}, \quad T^+ = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T} \quad (4)$$

L'équation (1) devient:

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (5)$$

Après une longue manipulation. (2) devient:

$$\left( \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^{+2}} \right) = -Ra^* \left( \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \cos(\alpha) - \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \sin(\alpha) \right) \quad (6)$$

L'équation (3) devient :

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \left( u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) = \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (7)$$

$Ra^* = \frac{k\rho g\beta L\Delta T}{\mu a}$  : le nombre de Darcy-Rayleigh modifié.

Les conditions aux limites sont :

$$\forall y \text{ à } x=0 \text{ et } x=L : \quad \frac{\partial T^+}{\partial x^+} = 0 \quad \text{et} \quad \psi^+ = 0$$

$$\forall x \text{ à } y=H : \quad \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = 0 \quad \text{et} \quad \psi^+ = 0$$

$$\forall x \text{ à } y=0 : \quad T^+(x^+) = \sin(2\pi x^+) \quad \text{et} \quad \psi^+ = 0$$

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité, nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt local :

$$Nu = -\frac{\partial T^+}{\partial y^+} \Big|_{y^+=0}$$

## III. FORMULATION NUMERIQUE

Pour la résolution du système d'équations couplées, obtenu, et les conditions aux limites associées, nous considérons pour l'équation (6), une solution numérique par la méthode des différences centrées. Alors que pour l'équation de la chaleur (7), nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Cette méthode classique est due à Patankar [5].

On découpe l'espace annulaire selon les directions  $x$  et  $y$  en un ensemble de volumes élémentaires ou « volume de contrôle » égaux à «  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot l$  » (Fig. 2). (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité dans la direction  $z$  comme épaisseur). Le centre d'un volume fini typique est un point  $P$  et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres  $e$ ,  $w$ ,  $n$  et  $s$ . Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points  $E$ ,  $W$ ,  $N$  et  $S$ . Les variables scalaires ( $T$  et  $\psi$ ) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

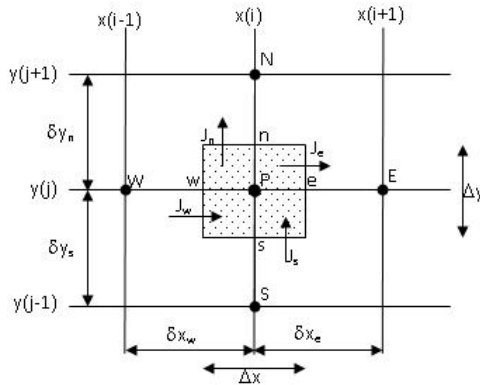


Fig. 2 : Volume de contrôle

Nous considérons l'équation de la chaleur (7), elle s'écrit :

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} \left( u^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( v^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) = 0$$

L'équation discrétisée de la variable T est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Après quelques manipulations, on obtient l'équation discrétisée finale :

$$a_P T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W \quad (8)$$

Les coefficients de cette équation sont bien définis par S.V Patankar [5]. Le schéma numérique du Power Law est utilisé. Les équations discrétisées peuvent se mettre sous une forme adaptée précisément à une résolution à l'aide d'une méthode itérative à coefficients de relaxation.

#### IV. RESULTATS ET DISCUSSION

Les distributions des champs thermique et dynamique et la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi active, pour une cavité rectangulaire dont la température de la paroi inférieure varie périodiquement, les autres parois étant adiabatiques et qui est caractérisée par un facteur de forme constant (A=3), sont présentées et analysées pour des angles d'inclinaison : 0°, 45° et 90° et des nombres de Darcy-Rayleigh modifiés : 10, 100, 300 et 500.

##### A. Validation du Code de Calcul

Moya et Ramos [4] ont considéré une enceinte parallélépipédique allongée suivant un axe donné et de section rectangulaire, les deux parois horizontales sont différentiellement chauffées alors que les parois verticales sont isolées. Nous avons appliqué notre code de calcul à leur cas et nous avons fait une comparaison de nos résultats avec les leurs. Ces résultats sont présentés dans le tableau 1, pour le cas d'un rapport de forme A=1, un nombre de Darcy-Rayleigh modifié Ra\*=100, deux valeurs de l'angle d'inclinaison ( $\alpha =$

45° et 90°), et pour différents maillages (20x20, 30x30 et 40x40).

TABLEAU I  
COMPARAISON DES VALEURS DE  $\psi_{max}$  AVEC LES RESULTATS DE LA REFERENCE [4].

nœuds	$\alpha=45^\circ$			$\alpha=90^\circ$		
	Réf [4]	Nos calculs	Erreur relative (%)	Réf [4]	Nos calculs	Erreur relative (%)
20x20	6.470	6.446	0.37	4.718	4.697	0.45
30x30	6.529	6.518	0.17	4.727	4.711	0.34
40x40	6.552	6.545	0.11	4.728	4.715	0.27

On constate un très bon accord entre nos résultats et ceux de la référence [4] avec une précision de l'ordre de 0.11 % à 0.45 % pour la valeur maximale de la fonction de courant.

##### B. Influence du Nombre de Darcy-Rayleigh Modifié $Ra^*$

1) *Isothermes et Lignes de Courants*: Les isothermes (a) et les isocourants (b) de la fig. 3. Pour  $\alpha=0^\circ$  et  $Ra^*=10$  sont symétriques par rapport à un plan fictif médian vertical, et les isocourants dont les valeurs sont faibles et qui s'organisent en cinq vortex principaux tournant chacun dans le sens contraire de celui qui l'avaisine avec l'apparition de deux petites cellules dans les coins bas gauche et droite de l'enceinte, tout ceci nous amène à conclure que pour ce cas là nous sommes en présence d'un régime pseudo conductif.

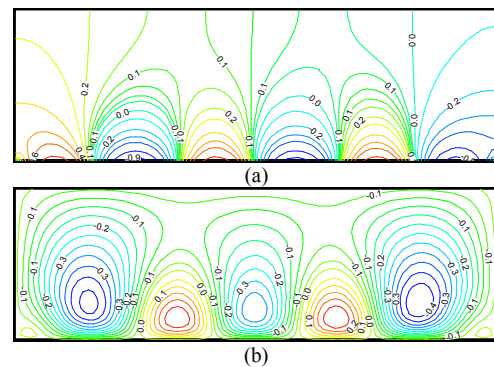


Fig. 3 : Isothermes (a) et Lignes de Courant (b) pour  $\alpha=0^\circ$  et  $Ra^*=10$

Pour  $Ra^*=100$  et toujours pour  $\alpha=0^\circ$ , la symétrie par rapport au plan fictif médian commence à disparaître pour les isothermes (a) de la fig. 4. Mais pour les isocourants (b) dont les valeurs augmentent sensiblement, elle y est toujours, ce qui traduit une convection naturelle naissante.

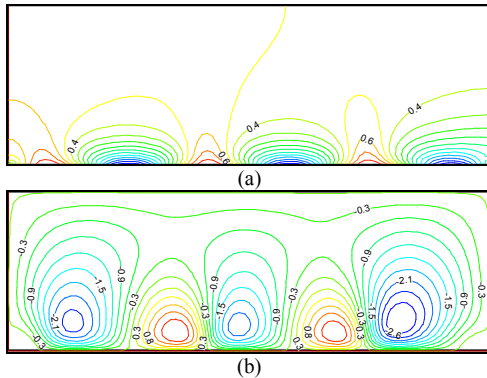


Fig. 4 : Isothermes (a) et Lignes de Courant (b) pour  $\alpha=0^\circ$  et  $Ra^*=100$

La figure 5 pour  $Ra^*=500$  et  $\alpha=0^\circ$ , montre que les cinq vortex principaux que montrent les isocourants (b) dont les valeurs augmentent, ont tendance à s'équilibrer entre eux, ceci est dû à la convection naturelle qui domine les transferts de chaleur dans ce cas.

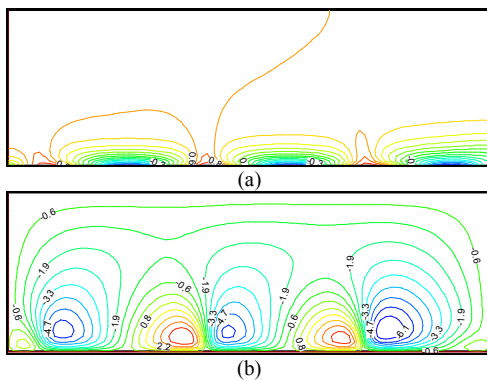


Fig. 5 : Isothermes (a) et Lignes de Courant (b) pour  $\alpha=0^\circ$  et  $Ra^*=500$

2) *Nombre de Nusselt Local Nu*: Les variations des nombres de Nusselt locaux le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des isocourants, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les une des autres.

La figure 6 illustre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi active quand  $\alpha=0^\circ$  pour différentes valeurs du nombre de Darcy-Rayleigh modifié, et nous permet de remarquer qu'avec l'augmentation de ce dernier, la valeur du nombre de Nusselt local augmente, ceci d'une part, d'autre part comme la variation de la température sur la paroi active est sinusoïdale, cette courbe montre que le nombre de Nusselt local est positif quand le transfert de chaleur se fait de la paroi vers l'enceinte, et il est négatif dans le cas contraire.

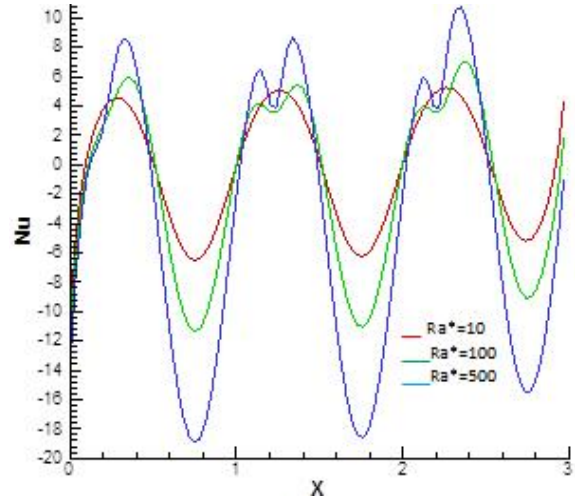


Fig. 6 : Variation du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs de nombre de Darcy-Rayleigh modifié quand  $\alpha=0^\circ$

### C. Influence de l'Angle d'Inclinaison $\alpha$

1) *Isothermes et Lignes de Courants*: Dans la figure 7 pour  $Ra^*=300$  et  $\alpha=45^\circ$ , la structure de l'écoulement change, comme le montre les isocourants (b) avec l'apparition de six vortex, les trois vortex tournant dans le sens horaire dominant ceux qui les avoisinent qui tournent eux dans un sens trigonométrique. Les valeurs de ces isocourants augmentent aussi significativement ce qui dénote d'une convection naturelle dominante.

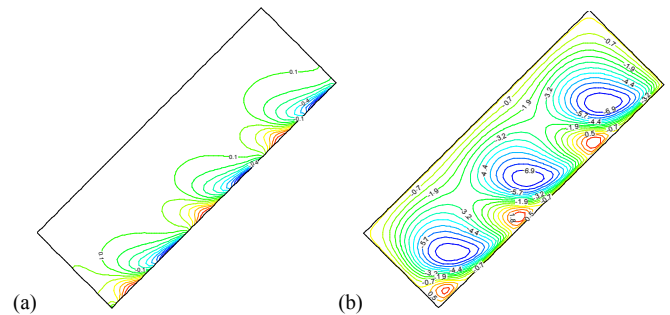


Fig. 7 : Isothermes (a) et Lignes de Courant (b) pour  $\alpha=45^\circ$  et  $Ra^*=300$

La figure 8 qui illustre la distribution des isothermes (a) et des isocourants (b) pour  $Ra^*=300$  et  $\alpha=90^\circ$  montre que pour ce cas l'écoulement s'organise en six vortex, et que ces derniers sont parfaitement symétriques par rapport à des plans médians fictifs horizontaux par paire de vortex contrarotatifs. Les valeurs des isocourants (b) montrent que la convection naturelle est toujours prépondérante.

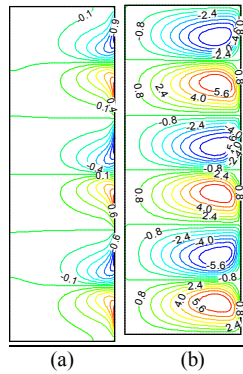


Fig. 8 : Isothermes (a) et Lignes de Courant (b) pour  $\alpha=90^\circ$  et  $Ra^*=300$

2) *Nombre de Nusselt Local Nu*: La figure 9 illustre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi active quand  $Ra^*=300$  pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , et nous permet de remarquer qu'avec l'augmentation de ce dernier, la valeur du nombre de Nusselt local augmente, ceci d'une part, d'autre part ce graphe montre que contrairement à celui de la fig. 6 qui montre que les variations pour différentes valeurs de  $Ra^*$  pour un même  $\alpha$  sont en phase, ici, ces variations ne sont pas en phases pour les différentes valeurs de  $\alpha$  considérées, on peut donc conclure que nous sommes bel et bien en présence d'un régime convectif pour la valeur du nombre de Darcy-Rayleigh modifiée considérée.

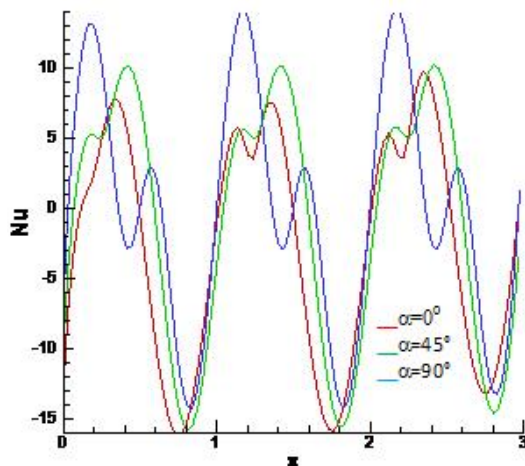


Fig. 9 : Variation du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison quand  $Ra^*=300$

## V. CONCLUSIONS

Le phénomène de la convection naturelle dans une cavité poreuse bidimensionnelle saturée d'un fluide newtonien a été étudié au moyen d'une méthode numérique. Dans un premier cas les résultats montrent que pour une valeur faible du nombre de Darcy-modifié, le régime d'écoulement qui domine est pseudo-conductif. Ces derniers montrent aussi que la convection multicellulaire apparaît quelque soit le nombre de

Darcy-Rayleigh modifié et l'angle d'inclinaison utilisé et que l'écoulement s'intensifie et le transfert de chaleur s'améliore en augmentant la valeur du nombre de Darcy-Rayleigh modifié. Dans un autre cas ces mêmes résultats nous montrent aussi que les transferts de chaleurs s'uniformisent mieux pour une inclinaison  $\alpha=90^\circ$ .

## NOMENCLATURE

$a$ :	Diffusivité thermique. ( $m^2.s^{-1}$ )
$C_p$ :	Chaleur massique à pression constante. ( $J. kg^{-1} K^{-1}$ )
$Da$ :	Nombre de darcy
$g$ :	Accélération de la pesanteur. ( $m.s^{-2}$ )
$H$ :	Hauteur de la cavité. (m)
$k$ :	Perméabilité du milieu poreux. ( $m^2$ )
$L$ :	Largeur de la cavité. (m)
$Nu$ :	Nombre de Nusselt
$P$ :	Pression. ( $N.m^{-2}$ )
$Pr$ :	Nombre de Prandtl.
$Ra$ :	Nombre de Rayleigh.
$T$ :	température du fluide. (K)
$t$ :	Temps. (s)
$T_{ref}$ :	température de référence. (K)
$u$ et $v$ :	Composantes de la vitesse suivant $x$ et $y$ . ( $m.s^{-1}$ )
$\vec{V}$ :	Vecteur vitesse. ( $m.s^{-1}$ )
$x, y$ et $z$ :	Coordonnées cartésiennes. (m)

## Lettres grecques

$\alpha$ :	Angle d'inclinaison. ( $^\circ$ )
$\beta$ :	Coefficient d'expansion thermique ( $K^{-1}$ )
$\lambda$ :	Conductivité thermique ( $W.m^{-1}.k^{-1}$ )
$\mu$ :	Viscosité dynamique. ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\nu$ :	Viscosité cinématique. ( $m^2.s^{-1}$ )
$\rho$ :	Masse volumique du fluide. ( $kg.m^{-3}$ )
$\sigma_T$ :	Facteur de la capacité thermique.
$\psi$ :	Fonction de courant. ( $m^2.s^{-1}$ )

## Exposant

$+$ : Paramètres adimensionnels.

## Indices

$f$ :	Fluide
$p$ :	Milieu poreux

## REFERENCES

- [1] D. Nield, and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York Inc. 1999.
- [2] D. B. Ingham, and I. pop, *Transport phenomena in porous media*, 2nd ed. Pergamon, Amsterdam, 2002.
- [3] A. Bahloul, "Boundary layer and stability analysis of natural convection in a porous cavity", *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 45, pp. 635-642, jul. 2006.
- [4] S.L. Moya, E. Ramos, and S. Mihir, "Numerical study of natural convection in a tilted rectangular porous material", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, pp. 741-756, apr. 1987.
- [5] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, New York, 1980.